Département d'informatique, partiel de Mathématiques discrètes
Semestre 2, mars 2013, 2 heures.

Seule une fiche manuscrite RV de format A5 est autorisée.

Relations particulières

Exercice 1 :

On note A l'ensemble des entiers de 1 à 6 ($A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).
Soit l'application $f : A \longrightarrow A$ définie par le système suivant :

$$\begin{cases} f(n) = n + 3 & \text{si } n \leq 3 \\ f(n) = 7 - n & \text{sinon} \end{cases}$$

En admettant que f est une bijection, compléter les tableaux de valeurs suivants :

n	1	2	3	4	5	6
$f(n)$						

n	1	2	3	4	5	6
$f^{-1}(n)$						

Exercice 2 :

Dans cet exercice, on utilise l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1 + x^2} \end{array}$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que :
   $\forall x, x' \in \mathbb{R}, f(x') = f(x) \Rightarrow \left((x' = x) \vee \left(x' = \dfrac{1}{x}\right)\right)$.
3. L'application f est-elle injective ?
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 3$.
5. L'application f est-elle surjective ?

Logique des propositions

Exercice 3 :

Pour chacun des propositions suivantes, dire si c'est une tautologie, une antilogie ou ni l'une ni l'autre. Justifier.

1. $\big((\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)\big) \Rightarrow P$.
2. $P \vee Q \Rightarrow \big(P \wedge (Q \Rightarrow Q)\big)$.
3. $\big((\neg Q \wedge P) \Rightarrow (Q \vee P)\big) \Rightarrow \neg(Q \vee P \vee \neg Q)$.

Exercice 4 :

A et B sont des variables propositionnelles. Formaliser à l'aide de connecteurs logiques les énoncés suivants :

1. « A seulement si B. »
2. « B à moins que A. »
3. « B, bien que A. »
4. « B est une condition nécessaire pour A. »

Exercice 5 :

Pour chaque phrase suivante, définir une variable propositionnelle pour chaque proposition élémentaire et formaliser ensuite la phrase en logique propositionnelle.

1. « Si le système fonctionne normalement, le noyau est en état de marche. »
2. « Le fait que le système ne soit pas en mode "multi-user" est une condition suffisante pour être en mode "interruption'. »
3. « Le système est en mode "multi-user" seulement s'il fonctionne normalement. »
4. « Soit le noyau est en état de marche, soit le système est en mode "interruption". »

Exercice 6 :

L'île de Puro Pira est peuplée de *Purs* qui disent toujours la vérité et de de *Pires* qui ne disent que des mensonges. Débarqué sur l'île, l'anthropologue Abercrombie rencontre trois indigènes Alice, Bernard et Chloé.

1. Alice affirme « C'est moi le chef ».
2. Bernard affirme aussi « C'est moi le chef ».
3. Quant à Chloé elle ajoute « Au plus l'un de nous trois dit la vérité. »

On sait de plus qu'il n'y a qu'un seul chef. Par la suite :

- A, B et C sont les variables propositionnelles qui valent chacune vrai si et seulement si Alice est un pur, Bernard est un pur et Chloé est un pur respectivement ;
- Ac, Bc et Cc sont les variables propositionnelles qui valent chacune vrai si et seulement si Alice est un chef, Bernard est un chef et Chloé est un chef respectivement ?

1. Montrer que l'affirmation « il n'y a qu'un seul chef » peut se représenter par la formule :

$$(Ac \vee Bc \vee Cc) \wedge \neg(Ac \wedge Bc) \wedge \neg(Ac \wedge Cc) \wedge \neg(Bc \wedge Cc).$$

2. Montrer que l'affirmation de Chloé peut se représenter par la formule :

$$(C \Rightarrow \neg A \wedge \neg B) \wedge (\neg C \Rightarrow A \wedge B).$$

3. Traduire en logique propositionnelle les propositions des items 1. et 2. relatives aux affirmations d'Alice et Bernard.
4. (Bonus) Montrer que le status en termes de chef, purs, pires, de chacun des indigène peut se déduire comme une conséquence logique de ces quatre formules.