DUT d'informatique. Contrôle de mathématiques discrètes. Semestre 1 (Novembre 2013). Durée 1h.

Seule une fiche manuscrite de format A5 est autorisée. Tous les exercices de ce sujet sont indépendants les uns des autres. Dans tout ce qui suit, on considère une algèbre de Boole munie des opérateurs classiques "+", ".", "$\overline{}$" et des variables booléennes a, b, c, d.

1 Cours (3pts)

1. Soit A et B deux ensembles d'un univers Ω tels que $A \subseteq B$. Définir $B \setminus A$ en compréhension.
2. L'ensemble vide appartient-il à tout ensemble ? Justifier.

2 (5 pts) Simplification de formules booléennes (d'après sujet de BTS-IG-2008)

La société Jurabois exploite des forêts d'arbres constituées exclusivement de feuillus et de résineux. Elle désire simplifier le règlement que les salariés doivent appliquer pour la coupe du bois. Actuellement, le règlement dit qu'un arbre est à abattre dans les quatre cas suivants :

— si c'est un résineux au tronc droit mesurant plus de 20 m de hauteur ;
— si c'est un feuillus de 50 ans ou plus ;
— s'il a moins de 50 ans et mesure plus de 20 m de hauteur ;
— s'il est tordu.

Pour un arbre quelconque, on définit les variables booléennes suivantes par :

— $a = 1$ si l'arbre est un résineux ;
— $b = 1$ si l'arbre a moins de 50 ans ;
— $c = 1$ si l'arbre mesure plus de 20 m de hauteur ;
— $d = 1$ si l'arbre est tordu.

1. Écrire sans justifier la fonction booléenne $f(a, b, c, d)$ qui traduit le règlement actuel d'abattage d'un arbre.
2. Grâce à une bonne gestion des forêts que la société exploite, il n'y a maintenant plus d'arbre tordu.
   (a) Montrer que le nouveau règlement d'abattage se traduit par la fonction $g(a, b, c) = ac + \overline{a}\overline{b} + bc$.
   (b) A l'aide d'une table de Karnaugh, donner sans justifier l'expression G qui est la forme la plus réduite de g.
   (c) Écrire la nouvelle règle d'abattage d'un arbre sous la forme la plus simple possible.

3 (6 pts) Démonstrations ensemblistes

Soit A et B deux sous-ensembles de Ω.

1. Soit $A_0 = \{1, 2, 3\}$ et $B_0 = \{3, 4\}$. Définir en extension $A_0 \cup B_0$, $P(A_0)$, $P(B_0)$, $P(A_0 \cup B_0)$ et $P(A_0) \cup P(B_0)$.
2. A-t-on l'égalité $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$? Justifier.
3. Montrer que l'on a $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

4 (6 pts) Relation entre puissances d'éléments

Sur $\mathbb{N}^*$ on définit la relation $a\mathcal{R}b$ si $a^b \leq b^a$.

1. A-t-on $2\mathcal{R}3$? $2\mathcal{R}7$? $2\mathcal{R}4$? $4\mathcal{R}2$? Justifier à chaque fois.
2. La relation est-elle réflexive ? Le démontrer.
3. La fonction logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ étant croissante, montrer que sur $\mathbb{N}^*$ $a\mathcal{R}b$ si $\dfrac{\ln(a)}{a} \leq \dfrac{\ln(b)}{b}$.
4. La relation est-elle transitive ? Pour justifier votre réponse, on pourra utiliser la question précédente.
5. La relation est-elle antisymétrique ? Le justifier.