DUT d'informatique. Contrôle de mathématiques discrètes. Semestre 1 (Octobre 2013). Durée 1h.

Seule une fiche manuscrite de format A5 est autorisée. Tous les exercices de ce sujet sont indépendants les uns des autres. Dans tout ce qui suit, on considère une algèbre de Boole munie des opérateurs classiques "+", ".", "$\overline{}$" et des variables booléennes a, b, c, d.

1 Cours

1. La première règle de suppression de la redondance est : "dans une somme booléenne, tout terme absorbe ses multiples". Démontrer cette règle (sans se servir des règles de suppression de redondance naturellement).
2. Donner la définition de ≪ la forme cannonique disjonctive d'une expression ≫.
3. Démontrer qu'il y a 1024 mintermes à 10 variables. Si vous utilisez un théorème pour faire la preuve, il faudra le prouver.
4. Que dire des colonnes adjacentes d'une table de Karnaugh ? Et les lignes ?

2 Forme canonique disjonctive

Donner la forme canonique disjonctive de l'expression suivante en détaillant les calculs :

$$(a+b+\overline{c}).\overline{(\overline{a}+bc)}.$$

3 Table de Karnaugh

On considère les deux expressions booléennes E_1 et E_2 suivantes :

$$\begin{aligned} E_1 &= \overline{a}.\overline{b}+a.c+a.\overline{b}.\overline{c}, \\ E_2 &= a.\overline{b}+a.c.d+a.b.c+\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}. \end{aligned}$$

1. A l'aide d'une table de Karnaugh donner l'expression K_1 qui serait la forme la plus réduite de E_1.
2. A l'aide d'une autre table de Karnaugh donner l'expression K_2 qui serait la forme la plus réduite de E_2.
3. Justifier algébriquement que l'on a l'égalité $E_1 = K_1$.
4. Justifier algébriquement que l'on a l'égalité $E_2 = K_2$.

4 Opérateur de Peirce

On considère l'opérateur binaire de Peirce défini pour toute paire de variables booléennes (a, b) par

$$a \downarrow b = \overline{a}.\overline{b}$$

.

1. Que valent $a \downarrow 0$ puis $0 \downarrow 0$ et enfin $1 \downarrow 1$?
2. Que valent $(a \downarrow 0) \downarrow (b \downarrow 0)$ et $(a \downarrow b) \downarrow 0$?
3. Réécrire l'expression $\overline{a}.(b+c)$ sans utiliser les opérateurs "+", "." et "$\overline{}$" mais en n'utilisant que l'opérateur de Peirce et des parenthèses.
4. L'opérateur de Peirce est-il associatif ? Le prouver.