DUT d'informatique. Partiel de mathématiques discrètes. Semestre 1 (Décembre 2013). Durée 1h30.

Seule une fiche manuscrite de format A5 est autorisée. Tous les moyens de communications sont interdits. Tous les exercices de ce sujet sont indépendants les uns des autres. Dans tout ce qui suit, on considère une algèbre de Boole munie des opérateurs classiques "+", ".", "$\overline{}$" et des variables booléennes a, b, c, d.

1 (5 pts) Algèbre de Boole

On cherche à analyser les codes binaires sur 4 bits.

1. Dans cette question, un code est correct s'il contient au plus deux 1 consécutifs. Par exemple 1010 est dit correct (il ne contient pas de 1 consécutifs) tandis 0111 ne l'est pas (il contient trois 1 consécutifs). Le but de cette question est de concevoir la fonction F qui renvoie 1 si le code de 4 bits $abcd$ est correct et 0 sinon.
   (a) Écrire la table de vérité de cet analyseur dans une table de Karnaugh.
   (b) Donner l'expression la plus simplifiée de la fonction F.
2. Dans cette question, un code est correct s'il ne contient pas de 0 consécutifs (par exemple 1011). Le but de cette question est de concevoir la fonction G qui renvoie 1 si le code de 4 bits $abcd$ est correct et 0 sinon.
   (a) Écrire la table de vérité de cet analyseur dans une table de Karnaugh.
   (b) Donner l'expression la plus simplifiée de la fonction G.
3. Dans cette question, un code est correct s'il vérifie les deux contraintes précédentes. Le but de cette question est de concevoir la fonction H qui renvoie 1 si le code de 4 bits $abcd$ est correct et 0 sinon.
   (a) Sans utiliser de table de Karnaugh, résoudre algébrique de ce problème.
   (b) Exprimer H sous la forme d'une somme de trois monômes.
   (c) Comment pourrait-on vérifier le résultat sur les tables de Karnaugh remplies aux deux premières questions.

2 (4 pts) Relations binaires entre ensembles

1. Soit P^* l'ensemble des nombres premiers impairs. On considère la relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments de P^* définie par :
$$p\mathcal{R}q \text{ si et seulement si } \frac{p+q}{2} \text{ appartient à } P^*.$$
   Montrer qu'elle n'est pas transitive.
2. On considère la relation $\mathcal{S}$ entre deux éléments de $\mathbb{Z}$ définie par :
$$m\mathcal{S}n \text{ si et seulement si } m^2+m=n^2+n.$$
   (a) Montrer que c'est une relation d'équivalence.
   (b) Construire la classe de 0, nommée $\dot{0}$.
   (c) Pour tout entier relatif m, construire la classe de m, nommée $\dot{m}$.

3 (3 pts) Démonstration par récurrence

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = 10^n.(9n-1)+1$.

1. Calculer U_0, U_1 et U_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_{n+1} = U_n + 9^2.10^n.(n+1)$.
3. Montrer que U_n est divisible par 81 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 (7 pts) Plus Grand Commun Diviseur

Dans ce qui suit, n est un entier naturel strictement positif. On considère trois suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $A_n = n^2 - 2n + 2$, $B_n = n + 2n + 2$ et $d_n = A_n \wedge B_n$.

1. Calculer A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, d_1, d_2, d_3 et d_4. Quelles intuitions avez vous à propos de d_n ?
2. Montrer que si un entier naturel d divise à la fois A_n et n, alors d divise 2.
3. Montrer que si un entier naturel d divise à la fois A_n et B_n, alors d divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
   (a) Montrer que A_n et B_n sont impairs. En déduire que d_n est impair.
   (b) En utilisant entre autre la question 3, montrer que d_n divise n.
   (c) En utilisant entre autre la question 2, en déduire que d_n divise 2, puis que A_n et B_n sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
   (a) Montrer que d_n est pair.
   (b) Montrer que 4 ne divise pas A_n. En déduire la même chose pour B_n
   (c) Montrer que d_n peut s'écrire sous la forme $d_n = 2.p$, où p est impair.
   (d) En utilisant entre autre la question 3, en déduire que p divise n.
   (e) En utilisant entre autre la question 2, en déduire que $d_n = 2$.

5 (5 pts) Nombres (premiers ou pas) de Fermat

Pour $p \in \mathbb{N}$, les nombres de Fermat sont ceux de la forme $F_p = 2^{2^p} + 1$.

1. Montrer que si n n'est pas une puissance de 2, alors $2^n + 1$ n'est pas un nombre premier. On pourra se servir de l'égalité
$$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \ldots - x + 1)$$
qui est est consiédérée comme admise pour tout entier naturel n impair.
2. Le calcul de F_5 donne $F_5 = 4294967297 = 6700417 \times 641$. Que dire de F_5 ? Est-ce contradictoire avec la question précédente ?
3. Montrer que $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$.
4. Montrer que $F_{n+1} - 2$ est divisible par F_n.
5. Montrer F_{n+1} et F_n sont premiers entre eux.