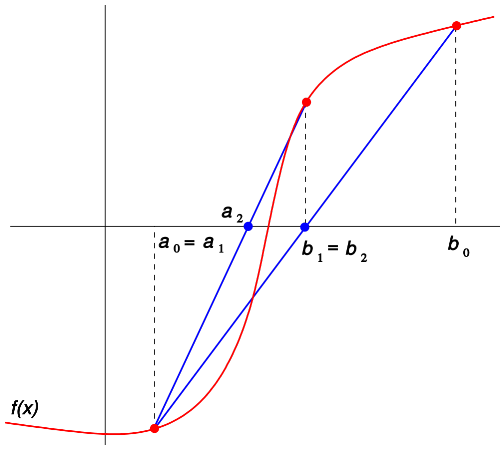
UE MESI, Master IMR 2ème année.
Novembre 2013 (durée 45 mn). J.-F. Couchot,

On cherche à résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ par la méthode de la fausse position. Cette méthode commence par deux points a_0 et b_0 tels que $f(a_0)$ et $f(b_0)$ sont de signes opposés. Comme la fonction f est continue, elle possède au moins une racine dans l'intervalle $[a_0, b_0]$.
Dans cette méthode, on considère que l'on a l'intervalle $[a_n, b_n]$. Pour calculer $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, on fait comme suit :



1. on construit la droite (D_n) qui passe par les points $(a_n, f(a_n))$ et $(b_n, f(b_n))$;
2. on construit $X(x_n, 0)$ le point d'intersection entre la droite (D_n) et l'axe de x ;
3. si $f(a_n)f(x_n) \leq 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$;
4. si $f(a_n)f(x_n) > 0$, alors $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Vos réponses seront données directement ci-dessous.

1. (2pts) Montrer que l'équation de la droite (D_n) est $y - f(b_n) = \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}(x - b_n)$.

2. (2pts) Montrer que le nombre x_n est donné par l'équation $x_n = a_n - \frac{a_n-b_n}{f(a_n)-f(b_n)} f(a_n)$.

3. (2pts) En moyenne, l'ordre de cette méthode est 1,618. Comparer cet ordre avec celui des autres méthodes du cours.

4. (5pts) Quelle partie de cette méthode est commune avec la méthode par dichotomie ? Est-elle toujours plus efficace ? Comparer les deux approches par exemple sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$.

5. (4pts) Quelle partie de cette méthode est commune avec la méthode de Lagrange ? Est-ce la même méthode ? Si ce n'est pas le cas, Expliquer ce qui diffère.

6. (5pts) Donner le code d'un programme qui implanterait cette méthode, et ce dans le langage de votre choix.