UE MESI, Master IMR 2ème année.
Novembre 2012 (durée 1h). J.-F. Couchot,

Nom : ....
Prénom : ....

On s'intéresse à résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ par la méthode de Müller. Dans cette méthode, on considère que l'on a le triplet de points (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n). Pour calculer x_{n+1}, on fait comme suit :

1. on approche $f(x)$ par un polynôme $P(x)$ aux points (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n),
2. on résout l'équation $P(x) = 0$. La racine la plus proche de x_n est x_{n+1} ;
3. on recommence avec le triplet $(x_{n-1}, x_n, x_{n+1})\dots$

Vos réponses seront données directement ci-dessous.

1. En utilisant une base de Lagrange, montrer que le polynôme $P(x)$ obtenu à l'étape 1. de la première itération est défini par

$$P(x) = \frac{(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})f(x_n)}{(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})} + \frac{(x - x_n)(x - x_{n-2})f(x_{n-1})}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n-2})} + \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})f(x_{n-2})}{(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})}$$

2. Montrer que le polynôme de la question précédente est de degré 2. Est-ce cohérent avec le fait qu'on veuille approximer f en trois points ?

3. Montrer que le polynôme de la première question peut s'écrire sous la forme $P(x) = a_n x^2 + b_n x + c$ où

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{f(x_n)}{(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})} + \frac{f(x_{n-1})}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n-2})} + \frac{f(x_{n-2})}{(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})} \\
b_n &= -\frac{f(x_n)(x_{n-1} + x_{n-2})}{(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})} - \frac{f(x_{n-1})(x_n + x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n-2})} - \frac{f(x_{n-2})(x_n + x_{n-1})}{(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})} \\
c_n &= \frac{f(x_n)x_{n-1}x_{n-2}}{(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})} + \frac{f(x_{n-1})x_n x_{n-2}}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n-2})} + \frac{f(x_{n-2})x_n x_{n-1}}{(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})}
\end{aligned}$$

4. Exprimer les deux racines x'_n et x''_n du polynôme précédent en fonctions de a_n, b_n et c_n lorsqu'on itère dans les réels.

5. Comment est alors défini x_{n+1} ?

6. On pourrait montrer que l'ordre de la convergence est 1,84. Comparer cette vitesse de convergence avec celle de Newton et celle de Lagrange.

7. Donner le code Python de la fonction `[n,X] = iteration_muller(x0,x1,x2,m,epsilon,f)` où
   - $\mathtt{x}_0$, $\mathtt{x}_1$ et $\mathtt{x}_2$ sont les trois premières valeurs des itérés, `m` est le nombre maximal d'itérations, `epsilon` est la précision souhaitée et `f` la fonction à itérer ;
   - `n` est le nombre d'itérations réalisées pour que $\mathtt{f(x_n)}$=0 ou que $|\mathtt{x_n} - \mathtt{x_{n-1}}| \leq \mathtt{epsilon}$, `n` étant inférieur à `m` et `X` est le vecteur contenant les valeurs $\mathtt{x}_0, \ldots, \mathtt{x}_n$.